3r DEBAT

Física i matemàtiques

Arnau Riera.
Història de la Física, Universitat de Barcelona, Diagonal 647.
5 d'Abril de 2004

Introducció

Què són les matemàtiques? Aquestes es descobreixen o es construeixen? Si una civilització intel·ligent sense cap vincle amb la humanitat desenvolupés unes matemàtiques, serien com les que coneixem nosaltres? Com podem explicar la efectivitat de les matemàtiques en la descripció de la natura, de l'economia o de tantes altres disciplines?

Qüestions com aquestes són encara totalment obertes i les seves respostes cauen en el terreny d'una *meta-matemàtica* ni molt menys consensuada dins la comunitat matemàtica. Els matemàtics però s'han preocupat per aquests problemes, ja que segons la resposta filosòfica que hi donin orientaran els seus treballs en un o altre sentit.

La matemàtica

A continuació fem una pinzellada a aquestes corrents de pensament fins a arribar a desenvolupar la nostra pròpia visió de la matemàtica. A grans trets podem distingir dues grans línies: la formalista-logicista i la constructivista-intuicionista.

Formalistes

El formalisme és iniciat per David Hilbert. Segons ells per construir una matemàtica només cal establir un conjunt d'axiomes que sigui consistent (que no es puguin contradir). Si aquests axiomes tenen o no alguna relació amb la realitat els és indiferent.

Logicistes

L'exponent més gran d'aquesta escola és Bertrand Russell. Per ell tota la matemàtica és lògica simbòlica. De fet defineix literalment la matemàtica com "Matemàtica és la classe de totes les proposicions de la forma *p* implica *q*, essent *p* i *q* proposicions que contenen una o més variables (les mateixes en les dues proposicions) i cap constant, excepte *constants lògiques* (la implicació, la noció de *tal que*, la de relació...)".
Així doncs la matemàtica pura no tindria cap relació amb el problema que planteja.

Constructivistes

Es basen en que les matemàtiques són inventades. L'existència d'un objecte matemàtic no queda establerta fins que no s'ha mostrat la forma de construir-lo.

Intuicionistes

L’intuicionisme sorgeix a principis del segle XX i posa com a fonaments de la matemàtica la veritat de la nostra intuïció. El seu fundador és Jan Brouwer, que manté que la matemàtica tracta uns objectes que han de ser definits segons un criteri que en proporcioni la construcció concreta. És una ciència amb la part *exacta* del pensament humà, la qual intueix la successió dels enters naturals i no pot ser traduïda a un sistema formal sense mutilacions.

A principis de segle el formalisme ja ha agafat una gran preponderància degut a diferents demostracions no constructives basades en la reducció a l’absurd. El 1889 Hilbert arriba a demostrar (per reducció a l’absurd) l’existència pura d’uns conjunts (finits) que havien de presentar unes propietats particulars en certs casos. El més impressionant és que ningú sabia com construir ni un sol d’aquests conjunts. És doncs una demostració d’existència pura sense cap construcció.

El teorema de Gödel

Kurt Gödel però, demostra el 1931 un teorema que revolucionarà el món de les matemàtiques. És l’anomenat teorema de la incompleció, i estableix que:

“En tot sistema formal consistent que contingui els nombres naturals amb la seva aritmètica, és possible construir una sentència de la qual no es possible provar ni la seva veracitat i la seva falsedat dins del sistema”.

Amb l’objectiu de donar una interpretació a aquest teorema presentem el següent exemple:
La conjectura de Goldbach manté que tot nombre parell pot ser descompost en la suma de dos primers. Aquesta mai ha pogut ser demostrada ni falsada i amb els ordinadors actuals s’ha arribat a verificar fins a nombres molt i molt grans.
Suposem ara que aquesta conjectura fos una d’aquestes sentències de les quals no és possible provar ni falsar la seva veracitat. Llavors davant la inexistència de cap contraexemple (només que n’existís un seria immediatament falsada), hem de pensar que la conjectura es verifica sempre, és a dir que és veritat encara que no la puguem demostrar.

Podem doncs reinterpretar el teorema de la incompleció com: “dins d’un sistema axiomàtic consistent, hi ha veritats que no són demostrables a partir dels axiomes”. A més a més Gödel demostra un segon teorema que estableix la impossibilitat de saber si una afirmació és d’aquest tipus.

Això va representar un cop dur per als formalistes, el seu objectiu fonamental que era la representació de les matemàtiques com un sistema axiomàtic formal quedava esfondrat. No obstant els seus resultats eren massa bons com per rebutjar-los només perquè la seva fita esdevenia impossible d’assolir.

La nostra visió

Després d'aquest petit recorregut històric, veiem les matemàtiques com un sistema d'axiomes consistent, a partir dels quals i mitjançant la lògica en deduïm uns teoremes. Hi distingim dos elements diferenciats, els axiomes i definicions que són a priori arbitraris i dependents de cada teoria, i les regles de la lògica que les considerem úniques i immutables. Planant sobre tot això queda el teorema de Gödel que ens avisa que sempre hi haurà veritats que no podran ser provades dins d'aquest sistema.

També considerem que una vegada enunciats els axiomes i les definicions d'una teoria, es dona automàticament existència a totes les conseqüències que d'aquests se'n pugui deduir. Així per exemple, una vegada s'han establert els nombres naturals i s'ha definit el concepte de nombre primer, immediatament existeixen infinits nombres primers independentment que hi hagi o no un matemàtic que ho demostri.

Segons aquesta visió els matemàtics construirien en els primers passos de l'elaboració d'una teoria i descobririen a partir que una vegada el sistema d'axiomes és establert.

Des d'aquest punt de vista també podem intentar contestar a la pregunta de si una altra civilització tindria o no unes altres matemàtiques. Els nombres naturals és una de les primeres abstraccions que l'home va fer de la natura i a partir dels quals van néixer les primeres matemàtiques. No ens sembla rebuscat pensar que una altra civilització intel·ligent també començaria per aquesta abstracció. I si com dèiem abans la lògica és universal, molts dels teoremes que desenvoluparien serien els mateixos. És a dir que la nostra matemàtica elemental seria comuna. Això no vol dir que a mesura que el nivell de sofisticació anés augmentant les matemàtiques anessin divergint conseqüència de les diferents necessitats de cada cultura.

Si com pensem la lògica és universal, una altra qüestió seria on s'amaga aquesta universalitat? No ens veiem amb cor però de donar-hi aquí resposta.

La irraonable efectivitat de les matemàtiques

En tot allò que vulguem descriure essent el màxim rigorosos haurem de ser quantitatius, que no és altra cosa que dir que haurem d'utilitzar les matemàtiques. És aquest el motiu de la introducció de les matemàtiques a la física i altres disciplines, el rigor que aquestes ens proporcionen. Fins i tot aquestes aplicacions han estat sovint motor d'evolució de la matemàtica en un o altre sentit per poder descriure noves realitats. La història de la física n'és plena d'aquests exemples: Newton va desenvolupar el càlcul integral per tal de poder calcular les òrbites que donaria una força d'atracció gravitatòria de tipus $1/r^2$.

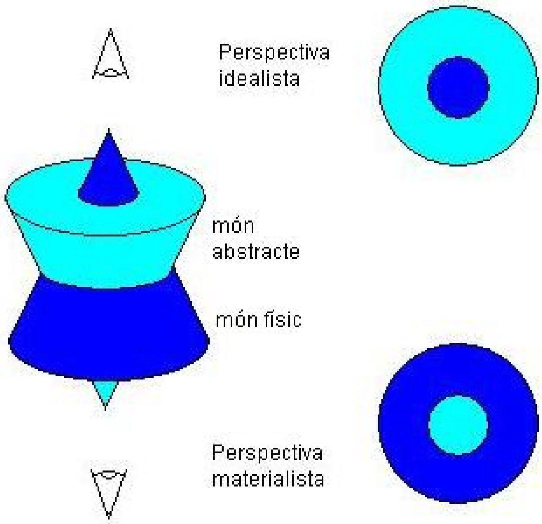
Volem treure doncs misticisme a aquesta irraonable efectivitat ja que considerem que l'únic que succeeix és que s'escullen els axiomes adequats perquè tot funcioni. Així per exemple el fet que el grup *SU(2)* ens descrigui amb tanta elegància l'espí de l'electró és simplement conseqüència dels axiomes en base als que hem construït els grups *SU(n)*. O quan Dirac enuncia l'existència de les antipartícules perquè la seva equació accepta solucions d'energia negativa és el resultat d'escollir com a postulat la seva equació i portar-la fins a l'extrem de les seves conseqüències.

Una perversió: els móns físic i matemàtic. La paradoxa de dos móns inclosos un en l'altre.

Les matemàtiques ens permeten descriure la natura i les seves lleis. Però ens permeten també estudiar una infinitat d'altres móns amb altres lleis. Móns amb més o menys dimensions, amb diferents geometries espaciotemporals... Ens permeten estudiar-les a si mateixes (teoria de nombres) etc. D'una banda sembla ser el nostre món físic un simple cas particular d'aquest món abstracte de les matemàtiques. Des d'aquesta perspectiva el món físic seria una realització material dels possibles universos que podrien descriure les matemàtiques, és a dir el món físic estaria inclòs dins els món pensable de les matemàtiques.

D'altra banda tot allò que és pensable necessita un suport físic, sigui tinta sobre un paper, clústers magnetitzats en un disc dur, o ions entre les connexions neuronals d'un cervell humà. És a dir tot allò pensable necessita un suport material pertanyent a la natura. Ara ens sembla doncs que tota idea queda inclosa dins la natura.

És com una paradoxa en que el món abstracte és dins del món material, i aquest alhora dins del món abstracte. Un conté l'altre i l'altre conté l'un. Tot depèn de la perspectiva des d'on es miri.



Bibliografia

[1] Nicolau i Pous, Francesc. La matemàtica i els matemàtics, Ed. Claret. Barcelona, 2000.

[2] Calder, Allan. El infinito, piedra de toque del constructivismo. Ideas del infinito. Investigación y Ciencia. Barcelona, 2001.

[3] Obra de Kurt Gödel. *http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Biografias/08-1-b-obra.html*