Cartografia a l’ordinador

Treball de recerca de batxillerat

Autor: Arnau Riera

Tutor: Xavi Asamar

Febrer 2000

Cartografia a l’ordinador

Abstract

Aquest treball està estructurat en 3 parts bàsiques, una primera on ens introduïm al món de la cartografia, s’analitzem els conceptes cartogràfics més elementals, i s’estudia l’aparell matemàtic necessari per a realitzar les projeccions cartogràfiques més habituals.

Una segona on descobrim en que consisteix la programació i realitzem, pas a pas, un programa d’ordinador que dibuixa les projeccions estudiades.

Una tercera en que es presenten 2 exemples d’aplicació de mapes a gran escala com els que fa el nostre programa, pardal 1.0.

Sumari

1. Introducció

El treball que s'ha realitzat no és tant una recerca sinó el desenvolupament d'un projecte. L'objectiu és crear una aplicació informàtica que ens mostri diferents mapes al monitor de l'ordinador.

Per a dur a terme aquest objectiu, es va dividir el treball en tres fases. Un primera on es va estudiar com es construeixen els mapes, quines característiques tenen..., és a dir, ens informàrem i introduirem en el món de la cartografia per a, més tard, tenir els coneixements necessaris per poder automatitzar el procés de dibuix amb l'ordinador. En aquesta segona fase vam realitzar un programa prototip qu a causa de diferents problemes ens vam veure forçats a anar modificant fins a obtenir una mena de motlle del programa definitiu. Per fer això vam treballar els passos necessaris per la realització d'un programa i el seu disseny. I finalment una tercera fase en la qual s'ha pogut simular algunes aplicacions que seria útils treballar.

Cal dir que el pas d'una fase a l'altra no va ser sobtada, sinó progressiva i sovint vàrem treballar en diferents vessants alhora. Bé, sigui com sigui, el resultat us el presentem a continuació.

Finalitzar voldria agrair l'ajuda donada pel tutor del treball, Xavi Asamar, a P. McDonnel pel seu llibre *Introduction to map projections* que va ser de gran utilitat i al personal de l'Institut Cartogràfic de Catalunya, que ens va atendre cordialment i ens va proporcionar força informació.

2. La cartografia

La cartografia és l'estudi dels mapes, el seu disseny, la seva construcció i la seva interpretació.

La Terra és un planeta del sistema Solar, té forma esfèrica tot i que està una mica aixafada pels pols. Aquests pols configuren el seu eix de rotació el període de la qual són 24 hores. El seu radi mig és de 6370 km, naturalment aquest és menor als pols (6356 km) i major a l'equador (6378 km)[1].

Els cercles de la superfície de l'esfera perpendiculars a l'eix de rotació s'anomenen paral·lels. El paral·lel que té el perímetre major, és l'equador. Existeixen unes altres circumferències, anomenades meridians, les quals tallen perpendicularment tots els paral·lels i es tallen entre elles en els dos pols.

Per determinar la posició d'un punt sobre l'esfera, s'utilitzen les dues coordenades geogràfiques, longitud i latitud. La latitud és l'angle que forma el radi del punt amb el pla de l'equador i la longitud és l'angle que formen el radi del punt amb el pla d'un meridià escollit arbitràriament, el meridià de Greenwich.

2.1. El problema

Un mapa és una superfície plana on hi senyalem unes característiques d'un territori determinat. Quan volem dibuixar un mapa d'una superfície considerable del nostre planeta ens trobem amb l'inconvenient de que la Terra és esfèrica i el mapa on la volem dibuixar, és

[1] Tot i que la Terra no sigui perfectament esfèrica, d'ara en endavant considerarem com si ho fos per tal d'estalviar-nos problemes a l'hora de dibuixar els mapes.

pla. En superfícies petites, com Llinars, la corbatura és insignificant i la negligim, però és impossible fer el mateix en superfícies considerables o en el cas de la Terra sencera.

Així doncs, ens trobem en un cas en que hem de passar de 3 coordenades de l'espai a 2 del pla, intentant naturalment, ser el màxim fidels a la realitat. Com que l'esfera no és una superfície desplegable, com pot ser el cub, el con o el cilindre, utilitzem l'ajuda d'unes eines anomenades projeccions cartogràfiques.

2.2. Les projeccions cartogràfiques

Quan volem representar la Terra o una part considerable d'aquesta en un plànol, hem de dur a terme dues transformacions. Primer hem de passar de la Terra, el nostre planeta que té un radi d'uns 6370 km, a una esfera o globus de dimensions prou reduïdes per cabre al mapa. A continuació hem d'aplicar un segon pas, on passem del globus reduït al mapa.

Per fer el primer pas només hem d'aplicar una reducció d'escala, però per realitzar el segon ens trobarem que existeixen infinits mètodes. Aquests mètodes s'anomenen *projeccions cartogràfiques* i consisteixen en transformar les coordenades geogràfiques longitud, latitud a cartesianes x, y. A continuació analitzarem els principis matemàtics necessaris per a utilitzar i construir aquests sistemes.

2.2.1. Principis matemàtics

2.2.1.1. Escala

L'escala és el factor de reducció en passar del nostre planeta a una esfera de reduccions prou petites per a ser projectada al paper o a la pantalla.

$$\text{Escala} = \frac{\text{distància al globus}}{\text{distància a la Terra}} = \frac{\text{radi globus}}{\text{radi Terra}}$$

Així si a la Terra un distància de 100 km queden representats a l'esfera com a 2 cm, l'escala serà:

$$Escala = \frac{\text{distància al globus}}{\text{distància a la Terra}} = \frac{2cm}{100km} = \frac{0.02m}{100000m} = 2 \cdot 10^{-7}$$

2.2.1.2. Factor d'escala

Fins ara només em tingut en compte que s'ha de reduir el tamany de la terra a un globus perquè aquesta pugui ser representada. Però en realitzar la projecció algunes distàncies sofreixen una transformació en relació al globus, aquest factor, que tan pot ser reductor com d'ampliació s'anomena factor d'escala. Té un valor numèric que es calcula mitjançant:

$$\text{Factor d'escala} = \frac{\text{distància al mapa}}{\text{distància al globus}}$$

Com es pot veure, les distàncies que en ser projectades no experimentin cap transformació tindran un factor d'escala d'u, les que es redueixin tindran un factor d'escala menor d'u, i les que quedin ampliades major.

2.2.1.3. Matemàtica de l'esfera

Ja que hem de realitzar les projeccions d'una esfera passarem a descriure les seves propietats geomètriques.

2.2.1.3.1. Perímetre de paral·lels i meridians

El perímetre de la circumferència és:

$$p=2\pi R$$

Com el radi de l'equador i els meridians coincideix amb el radi de l'esfera, el seu perímetre o longitud serà 2πR, considerant R com el radi del globus.

Ara bé per trobar la longitud de la resta de paral·lels ens trobem que desconeixem el seu radi. Per resoldre aquest problema farem ús de la trigonometria.

El radi de qualsevol paral·lel és R per cosinus de la latitud i per tant, el seu perímetre serà:

$$\text{Perímetre meridià i equador} = 2\pi R$$
$$\text{Perímetre paral·lel} = 2\pi R \cos\varphi$$

2.2.1.3.2. Àrea compresa entre l'equador i un paral·lel

L'àrea compresa entre dos paral·lels molt, molt junts en qualsevol latitud tindrà una amplada de:

$$C = R\, d\varphi$$

i un perímetre de:

$$p = 2\pi R \cos\varphi$$

El seu valor seria per tant el producte del perímetre per l'amplada

$$A = 2\pi R \cos\varphi \cdot R\, d\varphi.$$

Si sumem totes les àrees infinitament primes entre l'equador *($\varphi=0$)* i un paral·lel obtindrem l'àrea total compresa entre l'equador i aquest paral·lel, per tant:

$$S = \int_0^{\varphi} 2\pi R^2 \cos\varphi\, d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^{\varphi} \cos\varphi\, d\varphi = 2\pi R^2 \sin\varphi$$

2.2.1.3.3. Cercle màxim

El cercle màxim és la intersecció que produeix un pla que conté els centre de l'esfera amb aquesta. Els meridians i l'equador són cercles màxims. La propietat més important d'aquest cercle és que conté el recorregut més curt d'un punt de la superfície de l'esfera a un altre.

Per calcular la distància més curta entre dos punts(*A* i *B*) de la superfície del globus, primer trobarem l'angle de l'arc del cercle màxim en radians i el multiplicarem pel radi. Aquest angle, serà l'angle que formaran els vectors posició dels punts *A* i *B*.

En coordenades geogràfiques:

$$A=(R,\varphi_a,\lambda_a)$$

$$B=(R,\varphi_b,\lambda_b)$$

Si passem de coordenades geogràfiques a cartesianes, en una esfera de radi 1, tenim:

$$\vec{A}=(\cos\varphi_a\cos\lambda_a,\ \ \cos\varphi_a\sin\lambda_a,\ \ \sin\varphi_a);\quad \left|\vec{A}\right|=1$$
$$\vec{B}=(\cos\varphi_b\cos\lambda_b,\ \ \cos\varphi_b\sin\lambda_b,\ \ \sin\varphi_b);\quad \left|\vec{B}\right|=1$$

Aplicant el producte escalar:

$$\cos(A\hat{\ }B)=\frac{\cos\varphi_a\cos\lambda_a\cos\varphi_b\cos\lambda_b+\ \ \cos\varphi_a\sin\lambda_a\cos\varphi_b\sin\lambda_b+\ \ \sin\varphi_a\sin\varphi_b}{1\cdot 1}=$$
$$=\cos\varphi_a\cos\varphi_b(\cos\lambda_a\cos\lambda_b+\sin\lambda_a\sin\lambda_b)+\sin\varphi_a\sin\varphi_b$$

Sabent que *cos(a-b)=cos(a)cos(b)+sin(a)sin(b)* podem dir que:

$$\cos(A\hat{\ }B)\ =\cos\varphi_a\cos\varphi_b\cos(\lambda_a\text{-}\lambda_b)+\sin\varphi_a\sin\varphi_b=\cos\varphi_a\cos\varphi_b\cos\Delta\lambda+\sin\varphi_a\sin\varphi_{\mathrm{b}}$$

Aleshores, la distància (D) entre dos punts de l'esfera serà:

$$D=R\cdot\ \arccos(\cos\varphi_a\cos\varphi_b\cos\Delta\lambda+\sin\varphi_a\sin\varphi_b)$$

2.2.1.3.4. Loxodromes

Tot i que el cercle màxim ens mostrava la ruta més curta entre dos punts, en el cas de la navegació a llarga distància és molt difícil seguir aquesta ruta manualment amb compàs, ja que hauríem d'estar constantment canviant de rumb (angle que formen el vector velocitat amb el meridià). Així, seria més simple seguir un camí amb un rumb constant, o si més no, amb una variació de rumb constant. Aquestes rutes s'anomenen loxodromes i tenen la particularitat que sempre tallen els meridians amb el mateix angle. Els paral·lels i els meridians són loxodromes.

Amb la finalitat de realitzar una ruta prou curta i prou fàcil de seguir manualment, el que es fa és seguir una sèrie de loxodromes que s'aproximen al cercle màxim, de manera que el navegant només ha de canviar de rumb uns quants cops durant el trajecte, però no contínuament.

2.2.1.4 Característiques d'una projecció

2.2.1.4.1 Línies de referència

Són línies que conserven la seva longitud un cop projectades, és a dir, el factor d'escala és 1 en tota la línia i en la direcció de la mateixa.. El més usual, si la projecció no és obliqua, és que coincideixin amb un o dos paral·lels, anomenats paral·lels de referència. És important senyalar que una projecció no ha de tenir necessàriament una línia de referència.

2.2.1.4.2 Projeccions obliqües

Cada sistema de projecció té una manera d'orientar el globus a l'hora de realitzar la projecció. Depenent de com estigui orientat el globus ens sortiran unes coordenades al centre del mapa o unes altres. Quan en realitzar una projecció modifiquem la orientació del globus, tot i que no canviem de sistema de projecció, el mapa ens queda alterat.

Si la superfície de projecció està centrada en un pol de l'esfera, o en l'equador, o sobre un paral·lel, es diu que la projecció és polar, equatorial, o directa, respectivament. Si la superfície de projecció està centrada en un punt de l'equador o sobre un meridià es diu que la projecció es transversa o meridiana, respectivament. I si la superfície de projecció està centrada sobre un punt o sobre una circumferència de l'esfera qualsevol es diu que la projecció és obliqua.

2.2.1.4.3 Projeccions equidistants

Són les projeccions que tenen l'escala constant en una direcció del mapa. Així un mapa que tingués un factor d'escala en la direcció nord-sud de 1, seria una projecció equidistant i a més a més com tots els meridians tindrien un factor d'escala d'1 aquests serien de referència.

En aquest treball s'estudien la projecció cilíndrica equidistant, la projecció cònica equidistant, la projecció cilíndrica equirectangular, la projecció polar acimutal equidistant i la projecció cònica equidistant amb dos paral·lels de referència.

2.2.1.4.4 Projeccions planes o acimutals

Aquest tipus de projeccions tenen la característica que no deformen les direccions cap a tots els punts respecte un punt central durant la projecció del globus al plànol. Es tractaran la projecció polar acimutal equidistant, la projecció gnomònica, la projecció estereogràfica i la projecció polar acimutal equivalent.

2.2.1.4.5 Projeccions equivalents

Són les projeccions que mantenen les relacions de superfície. Convé destacar que cap projecció no té un factor d'escala d'1 en tot el plànol, per tant per mantenir l'àrea, el factor d'escala és més gran que 1 en una direcció i menor en la direcció perpendicular, de manera que es compensen mantenint així el valor de l'àrea. Aquestes dues direccions s'anomenen direccions principals.

S'estudiaran la projecció cilíndrica equivalent, la projecció Albers, la projecció polar acimutal equivalent, la projecció sinusoïdal i la projecció de Bonne.

2.2.1.4.6 Projeccions conformes

Les projeccions conformes compleixen dues característiques, la primera es que no deformen els angles en el procés de projecció, per tant els meridians i els paral·lels seran perpendiculars un cop projectats, i la segona es que el factor d'escala és el mateix en cada punt en totes les direccions possibles. Aquestes dues propietats fan que en les projeccions conformes qualsevol figura de l'esfera quedi representada al pla per una figura semblant. En aquest document només tractarem la projecció Mercator.

Cal destacar que una projecció no pot ser mai equivalent i conforme alhora i que és possible que hi hagi projeccions que no siguin ni conformes ni equivalents.

2.3. Algunes projeccions cartogràfiques

2.3.1 Projecció cilíndrica equidistant

Amb les tres figures bàsiques desplegables, el cilindre, el con, i el pla, es generen unes projeccions de gran simplicitat anomenades projeccions equidistants. Són equidistants perquè tots els meridians conserven l'escala.

En aquesta projecció en particular, el globus es troba a l'interior d'un cilindre que li és tangent en l'equador. Es transporten els punts de l'esfera al cilindre de manera que la mida de l'arc que va des d'un punt fins a l'equador en el globus és conserva quan projectem aquest punt en el cilindre.

El factor d'escala en la direcció Est-Oest en l'equador és 1, però aquest augmenta en augmentar la latitud perquè els paral·lels projectats prenen la mida de l'equador:

$$\text{Factor d'escala} = \frac{\text{distància al mapa}}{\text{distància al globus}} = \frac{\text{perímetre equador}}{\text{perímetre paral·lel}} = \frac{2\pi R}{2\pi R\cos\varphi} = \sec\varphi$$

Les equacions d'aquesta projecció són:

$$x = \frac{\pi}{180}\lambda R$$
$$y = \frac{\pi}{180}\varphi R$$

Aquesta projecció només és útil per representar zones pròximes a l'equador, i en l'ensenyament com a eina didàctica, ja que ajuda a entendre altres projeccions més complexes.

2.3.2. Projecció cònica equidistant

Un con és tangent al globus en un paral·lel. Com la cilíndrica equidistant, la distància d'un punt al paral·lel de contacte es conserva per aconseguir una escala d'1 en la direcció Nord-Sud.

La construcció d'aquesta projecció és més complicada. En totes les projeccions l'objectiu és aconseguir unes coordenades rectangulars (x, y) d'unes geogràfiques (φ, λ) que teníem inicialment. Però en aquest cas, degut a les característiques d'aquesta projecció, primer obtindrem unes coordenades auxiliars polars (r, α), on r serà la distància del punt O fins al punt que volem projectar, i α l'angle que formaran el radi r i el meridià de Greenwich en el mapa.

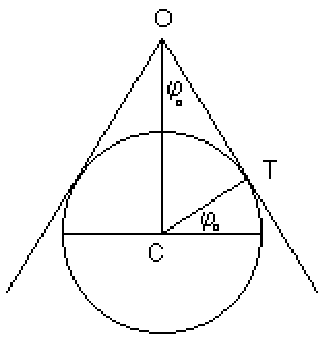


Figura 1. Secció del plantejament de la projecció cònica equidistant.

Amb l'ajut de la trigonometria determinem el costat OT del triangle rectangle OTC.

$$OT = \frac{R}{\tan \varphi_0} = R \cot \varphi_0$$

On φ_0 és la latitud del paral·lel de contacte que serà també paral·lel de referència.

El radi r serà la distància OT més o menys l'arc existent entre φ i φ_0.

$$r = OT + (\varphi_0 - \varphi)\frac{\pi}{180}R$$

Per definició

$$\alpha = k\lambda$$ [2]

i per tant

$$\alpha_{màx} = k\lambda_{màx} = k\cdot 360^o$$

Així per calcular α:

$$\alpha_{màx} = \frac{\text{longitud paral·lel de contacte}}{\text{radi } OT} = \frac{2\pi R\cos\varphi_0}{R\cot\varphi_0} = 2\pi\sin\varphi_0 \ \text{(rad)}$$

$$\alpha_{màx}(^o) = 2\pi\sin\varphi_0 \ \text{rad}\cdot\frac{360^o}{2\pi\ \text{rad}} = 360^o\sin\varphi_0$$

$$\alpha_{màx} = 360k \Rightarrow k = \frac{\alpha_{màx}}{360} = \frac{360\sin\varphi_0}{360} = \sin\varphi_0$$

$$\alpha = k\lambda = \lambda\sin\varphi_0$$

I finalment obtenim *x, y* a partir de *r,* α*:*

$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\sin\alpha$$

És un projecció útil si volem representar un petit interval en latitud al voltant del paral·lel que escollim com a paral·lel de referència.

2.3.3. Projecció polar acimutal equidistant

Podem considerar les projeccions cilíndrica equidistant i polar acimutal equidistant com a casos particulars de la projecció cònica equidistant. En el primer cas el paral·lel de referència tindria una latitud de 0º amb el que el vèrtex del con quedaria a l'infinit. I en el segon el paral·lel de referència estaria a 90º latitud coincidint amb el vèrtex del con.

[2] *k* és la constant del con. En les projeccions còniques, cada projecció té la seva constant depenent de com estigui configurada.

Considerant això, podem construir la projecció polar equidistant utilitzant les equacions de la projecció cònica equidistant i substituint la latitud del paral·lel de contacte (φ_0) per 90º.

$$
\begin{aligned}
&r = R\cot\varphi_0 + (\varphi_0 - \varphi)\frac{\pi}{180}R \\
&\alpha = \lambda\sin\varphi_0 \\
&r = (90-\varphi)\frac{\pi}{180}R = \frac{\pi}{2}R - \varphi\frac{\pi}{180}R \\
&\alpha = \lambda
\end{aligned}
$$

I com en el cas anterior:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\alpha \\
y &= r\sin\alpha
\end{aligned}
$$

Aquesta projecció només s'utilitza en les exploracions polars. És important assenyalar que en les projeccions acimutals qualsevol recta que passi pel centre (punt de contacte del pla amb el globus) és un cercle màxim, com a exemple tenim els meridians (si la projecció està centrada al pol).

2.3.4. Projecció cilíndrica equidistant amb dos paral·lels de referència o equirectangular

En les projeccions amb un paral·lel de referència el factor d'escala era major o igual a 1.

En les projeccions amb 2 paral·lels de referència el factor d'escala és 1 en aquests paral·lels i els meridians, menor que 1 en els paral·lels compresos entre els dos de referència i major d'1 en la resta de paral·lels.

La projecció equirectangular és exactament igual a la cilíndrica equidistant amb la diferència que ara el cilindre és secant al globus. Això no comporta canvis en la direcció y, però fa que ara tots els paral·lels no agafin la mida de l'equador, sinó que agafin la mida dels paral·lels per on talla el cilindre a l'esfera o paral·lels de referència. El resultat final és una compressió en la direcció Est-Oest en relació a la projecció anterior.

Les seves equacions són:

$$x = \frac{\pi}{180}\lambda R\cos\varphi_0$$
$$y = \frac{\pi}{180}\varphi R$$

És una projecció que s'utilitza per a àrees properes a l'equador i a un dels paral·lels de referència.

2.3.5. Projecció cònica equidistant amb dos paral·lels de referència

Consisteix en un con que és secant al globus. Es projecten els punts del globus al con i es desplega el con. Per resoldre-la utilitzarem el mateix mètode d'abans, primer trobarem el radi i l'angle que formarà aquest amb el meridià de Greenwich i finalment les coordenades rectangulars (x, y) definitives.

Un cop desplegat el con, $\alpha_{màx}$ en radians ha de ser igual al quocient del perímetre dels paral·lels de referència entre el seu corresponent radi.

$$\alpha_{màx} = \frac{2R\pi\cos\varphi_1}{r_1} = \frac{2R\pi\cos\varphi_2}{r_1 + d}$$

On d és la distància de entre els paral·lels de referència i φ_1 i φ_2 la latitud d'aquests paral·lels.

Simplifiquem:

$$\frac{\cos\varphi_1}{r_1} = \frac{\cos\varphi_2}{r_1 + d}$$

Aïllem r_1:

$$r_1 = \frac{d\cos\varphi_1}{\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1}$$

Substituïm per $d = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{180}\pi R$.

$$r_1 = \frac{R(\varphi_1 - \varphi_2)\pi\cos\varphi_1}{180(\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1)}$$

Amb r_1 ja podem obtenir l'expressió de r, de la mateixa manera com em fet en el cas anterior amb OT en la projecció cònica equidistant.

$$r = r_1 + (\varphi_1 - \varphi)\frac{\pi}{180}R$$

Per trobar α primer buscarem k, ja que $\alpha = k\lambda$. Sabem que:

$$\alpha_{màx} = \frac{2R\pi\cos\varphi_1}{r_1}, \text{ com } \quad k = \frac{\alpha_{màx}}{2\pi}$$

$$k = \frac{2R\pi\cos\varphi_1}{2\pi r_1} = \frac{R\cos\varphi_1}{r_1}$$

Per tant

$$\alpha = \frac{R\cos\varphi_1}{r_1}\lambda$$

$$x = r\cos\alpha$$
$$y = r\sin\alpha$$

Podem dir que aquesta, és una projecció més útil que la cònica equidistant amb un paral·lel de referència, tot i que no és conforme ni equivalent apareix en alguns atlas per a representar països.

2.3.6. Projecció cilíndrica equivalent

Aquesta projecció és idèntica a la cilíndrica equidistant amb la diferència que per mantenir l'àrea s'ha de reduir l'escala dels meridians en augmentar la latitud. L'equació de la coordenada cartesiana x, és la mateixa que en la cònica equidistant:

$$x = \frac{\pi}{180}\lambda R$$

Per calcular y sabem de l'apartat 2.3 que l'àrea compresa entre l'equador i un paral·lel és:

$$A=2\pi R^2 \sin\varphi$$

Com la projecció és equivalent, aquesta àrea ha de ser la mateixa en el plànol. L'àrea en el mapa és el perímetre de l'equador per y, així doncs:

$$2\pi R^2 \sin\varphi = 2\pi R \cdot y$$
$$y = R\sin\varphi$$

No és una projecció que s'utilitzi gaire degut a les distorsions que produeix en zones llunyanes a l'equador i per tant només es fa servir en superfícies properes a aquest.

2.3.7. Projecció d'Albers

Es tracta d'una projecció semblant a la cònica equidistant amb 2 paral·lels de referència però es modifica l'escala dels meridians per mantenir l'àrea.

L'àrea compresa entre els 2 paral·lels de referència en l'esfera és:

$$A=2\pi R(R\sin\varphi_1-R\sin\varphi_2)=2\pi R^2 (\sin\varphi_1-\sin\varphi_2).$$

L'àrea compresa entre els 2 paral·lels un cop projectada és:

$$A=k(\pi r_2^2-\pi r_1^2)= k\pi (r_2^2-r_1^2).$$

Com les dues àrees han de ser iguals:

$$k\pi(r_2^2 - r_1^2) = 2\pi R^2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)$$

D'altra banda sabem que els paral·lels de referència mesuren el mateix en l'esfera que en el mapa (és la seva definició). Si igualem aquestes dues mesures:

$$2\pi R\cos\varphi_1 = k2\pi r_1 \qquad 2\pi R\cos\varphi_2 = k2\pi r_2$$
$$r_1 = \frac{R\cos\varphi_1}{k} \qquad r_2 = \frac{R\cos\varphi_2}{k}$$

Substituïm r_1 i r_2 en l'equació anterior i aïllem k:

$$k\pi(r_2^{\,2} - r_1^{\,2}) = 2\pi R^2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)$$

$$k\pi\left(\frac{R^2\cos^2\varphi_2}{k^2} - \frac{R^2\cos^2\varphi_1}{k^2}\right) = 2\pi R^2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)$$

$$\frac{\cos^2\varphi_2 - \cos^2\varphi_1}{k} = 2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)$$

$$k = \frac{\cos^2\varphi_2 - \cos^2\varphi_1}{2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)}$$

Apliquem el teorema fonamental de la trigonometria, $cos^2x+sin^2x=1$, i simplifiquem:

$$k = \frac{1-\sin^2\varphi_2 - (1-\sin^2\varphi_1)}{2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)} = \frac{\sin^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_2}{2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)} = \frac{(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)}{2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)}$$

$$k = \frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{2}$$

Ara hem de calcular *r*, ho farem aplicant el mateix principi que per calcular *k*. L'àrea compresa entre φ_1 i φ és la mateixa en el globus que en el mapa:

$$k\pi(r^2 - r_1^{\,2}) = 2\pi R^2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi)$$

Aïllem *r*:

$$r = \sqrt{\frac{kr_1^{\,2} + 2R^2(\sin\varphi_1 - \sin\varphi)}{k}}$$

Com coneixem la constant del con

$$\alpha = k\lambda$$

Aquesta projecció és la que s'utilitza per a representar el mapa dels Estats Units. La seva propietat equivalent és útil pels problemes geogràfics. És un projecció que no deforma gaire les àrees.

2.3.8. Projecció polar acimutal equivalent

Per deduir les equacions d'aquesta projecció partim del fet que és un projecció equivalent, és a dir, l'àrea compresa entre el pol de contacte i un paral·lel serà la mateixa al mapa i al globus:

$$\pi r^2 = 2\pi R^2 - 2\pi R^2 \sin\varphi$$

Aïllem *r*:

$$\pi r^2 = 2\pi R^2 (1 - \sin\varphi)$$
$$r = \sqrt{2R^2 (1 - \sin\varphi)}$$

Substituïm $sin\varphi = cos(90-\varphi)$:

$$r = \sqrt{2R^2 (1 - \cos(90 - \varphi))}$$

Tenint en compte que $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \Rightarrow 1 - \cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ substituïm $1\text{-}cos(90\text{-}\varphi)$ i simplifiquem:

$$r = \sqrt{2R^2\, 2\sin^2\left(\frac{90-\varphi}{2}\right)}$$
$$r = 2R\sin\left(\frac{90-\varphi}{2}\right)$$

Naturalment, com és una projecció plana $\alpha = \lambda$.

Tot i que alguns atlas utilitzen aquesta projecció per a representar els pols, el cas oblic és més corrent. La projecció polar acimutal equivalent va ser creada per J. H. Lambert que va fer grans contribucions a la cartografia a mes d'introduir les funcions hiperbòliques en el camp de la geometria.

2.3.9. Projecció sinusoïdal

En aquesta projecció els paral·lels són línies rectes de factor d'escala 1 separats per una distància igual a l'arc existent entre ells en l'esfera. En realitat és com la cilíndrica equidistant amb l'única diferència que cada paral·lel té factor d'escala 1.

És fàcil veure doncs, que les seves equacions seran:

$$x = \frac{\pi}{180}\lambda R\cos\varphi$$
$$y = \frac{\pi}{180}\varphi R$$

En la projecció sinusoïdal els meridians queden corbats com la gràfica de la funció sinus (o cosinus) i és per això que rep aquest nom.

S’acostuma a fer servir per a representar continents aïllats com Àfrica i Sud Amèrica degut a la gran distorsió que provoca quan projecta la Terra sencera. A més a més, també és una projecció equivalent, fet que fa que s’utilitzi per zones pròximes a l’equador.

2.3.10. Projecció de Bonne

Aquesta projecció és una modificació de la cònica equidistant per obtenir tots els paral·lels de referència. Per aconseguir les equacions d’aquest mètode modificarem les expressions de la cònica equidistant de manera que tots els paral·lels ens quedin amb factor d’escala 1.

Tot i que en aquesta projecció tots els paral·lels són de referència, estem treballant amb la base de la projecció cònica, amb el que haurem de definir igualment un paral·lel central (el que era el paral·lel de referència en la cilíndrica equidistant). Per tant la distància en el mapa del paral·lel central fins al seu origen serà:

$$OT = \frac{R}{\tan\varphi_0} = R\cot\varphi_0$$

La projecció no sofreix cap modificació en el que és la distància del punt a l’origen on coincideixen tots els meridians per tant aquesta continuarà sent:

$$r = OT + (\varphi_0 - \varphi)\frac{\pi}{180}R$$

L'angle α que formaran r i el meridià de Greenwich en el mapa si que s'altera. Podem dir que $\alpha = \alpha_{màx} \frac{\lambda}{360}$ (en aquesta projecció $\alpha_{màx}$ és diferent a cada paral·lel).

Si $\alpha_{màx}$ és el quocient entre el perímetre d'un paral·lel i el radi d'aquest, substituïm aquest quocient a l'expressió d'α i obtenim:

$$\alpha_{màx} = \frac{2\pi R\cos\varphi}{r}$$
$$\alpha = \frac{2\pi R\cos\varphi}{r}\cdot\frac{\lambda}{360}$$
$$\alpha = \frac{\pi R\lambda\cos\varphi}{180r}$$

Utilitzar la projecció de Bonne és una bona elecció per zones situades íntegrament en un hemisferi, com Europa.

2.3.11. Projecció Policònica

En aquesta projecció cada paral·lel és tractat separadament com si fos el paral·lel de referència de la projecció cònica equidistant. Per tant cada latitud tindrà el seu propi radi OT. Per deduir les equacions d'aquest sistema, només hem d'utilitzar les mateixes que les del paral·lel de referència de la projecció cònica equidistant.

$$r = OT = \frac{R}{\tan\varphi} = R\cot\varphi$$
$$\alpha = 360\sin\varphi$$

Aquesta projecció no s'acostuma a utilitzar per a representar grans regions, però durant mols anys es va fer servir en els mapes topogràfics de geologia.

2.3.12. Projecció ortogràfica

És una projecció que ens presenta una vista del globus. És el mateix sistema que s'utilitza en l'arquitectura, els raigs de projecció són perpendiculars al pla de projecció, com a resultat les figures que són paral·leles al pla de projecció no presenten cap transformació ni de mida ni de forma.

Amb aquesta projecció el resultat que s'obté sembla més una fotografia que no pas un mapa.
Si considerem un punt en la superfície del globus com un vector de radi R, i que forma un angle φ amb el pla XY i un angle λ amb el pla YZ, x i y seran les components y, z d'aquest vector i equivaldran a:

$$y = R\sin\varphi$$
$$x = R\cos\varphi\sin\lambda$$

Les seves aplicacions són purament artístiques.

2.3.13. Projecció Mercator

La projecció Mercator, que per cert és una de les més populars, és una modificació de la projecció cilíndrica equidistant amb un paral·lel de referència per aconseguir que aquesta sigui conforme. En la projecció cilíndrica el factor d'escala era d'1 en la direcció Nord-Sud i secφ en la direcció Est-Oest. Per transformar aquesta projecció en conforme hem de fer que el factor d'escala sigui el mateix en totes les direccions, per tant haurem d'aconseguir que el factor d'escala sigui també $sec\varphi$ en la direcció Nord-Sud.

La distància y entre dos paral·lels molt junts (infinitament junts) en l'esfera és:

$$dy = R\,d\varphi$$

Com en la projecció Mercator el factor d'escala en la direcció dels meridians, aquesta mateixa distància serà:

$$dy = R\sec\varphi\, d\varphi$$

Si volem calcular la distància de l'equador fins a un paral·lel, serà la suma de totes les petites distàncies, és a dir:

$$
\begin{aligned}
y &= \int_0^{\varphi} R\sec\varphi \; d\varphi = R\int_0^{\varphi} \sec\varphi \; d\varphi = \qquad\qquad (\text{canvi variable} \sin x = t) \\
&= \int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos(\arcsin t)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \int_0^{\varphi} \frac{1}{1-t^2}\, dt = \int_0^{\varphi} \frac{1}{(1-t)(1+t)}\, dt = \int_0^{\varphi} \frac{-1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)}\, dt = \\
&= \left[\frac{1}{2}\Big(\ln\big(1+t\big) - \ln\big(1-t\big)\Big)\right]_0^{\varphi} = \left[\frac{1}{2}\Big(\ln\big(1+\sin x\big) - \ln\big(1-\sin x\big)\Big)\right]_0^{\varphi} = \\
&= \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)\right]_0^{\varphi} = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arcsinh} x\right]_0^{\varphi} = \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}\varphi
\end{aligned}
$$

El valor de *x* naturalment no variarà del de la cilíndrica equidistant.

Aquesta projecció ha estat molt utilitzada en navegació durant 400 anys ja que té la propietat que les loxodromes queden representats com una recta. El defecte que té es que produeix una gran deformació de les àrees en allunyar-se de l'equador.

2.3.14. Projecció Estereogràfica Polar

La projecció estereogràfica és literalment una projecció, i no com la majoria de les que hem vist que eren un artilugi matemàtic. Un pla és tangent a l'esfera per un pol i un focus de projecció es troba a l'altre pol. Els raigs de projecció surten del focus passant per punt de la superfície que volem projectar i es projecten al pla.

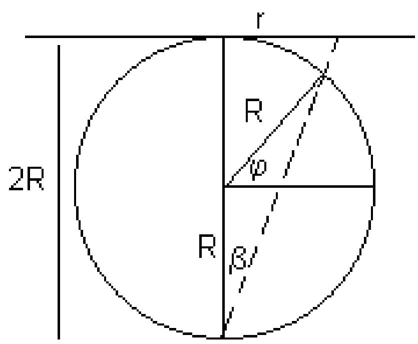


Figura 2. Realització de la projecció estereogràfica polar.

Del gràfic veiem que $2\beta + 90 + \varphi = 180 \Rightarrow \beta = \frac{90-\varphi}{2}$. Per calcular r, només hem de resoldre el triangle rectangle.

$$r = 2R\tan\left(\frac{90-\varphi}{2}\right)$$

Com és una projecció polar:

$$\alpha = \lambda.$$

Aquesta projecció ve de l'antiga Grècia, a part d'algunes aplicacions militars on la conformitat és important, les altres projeccions planes són més utilitzades.

2.3.15. Projeccions gnomòniques

En les projeccions gnomòniques els raigs projectors surten del centre de l'esfera i es projecten en un cilindre, un con o un pla. Les projeccions cilíndrica i cònica gairebé no s'utilitzen degut a l'ampliació que realitzen de les àrees en allunyar-nos de l'equador i a que no tenen cap avantatge per compensar aquest defecte. En canvi la projecció gnòmonica plana és molt important i serà la que treballarem.

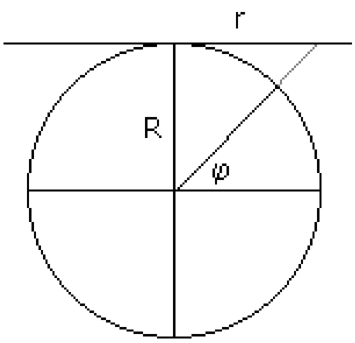


Figura 3. Secció de la realització de la projecció gnomònica polar plana.

Les seves equacions són ben fàcils de deduir, només cal resoldre un triangle rectangle.

$$r = \frac{R}{\tan \varphi}$$

És important observar que tots els raigs projectors surten del centre de l'esfera i és projecten en una superfície plana, d'aquesta manera, els cercles màxims quedaran representats en el plànol com a segments rectes, o més ben dit, qualsevol recta que dibuixem en el plànol serà un cercle màxim.

Aquesta propietat és la que dona importància a la projecció i fa que s'utilitzi juntament amb la Mercator per a la navegació.

2.4 Projeccions Obliqües

Com hem dit anteriorment, un projecció obliqua és una projecció en que hem rotat el globus abans de realitzar la projecció, de manera que l'eix de rotació del globus no coincideix amb l'eix del cilindre o l'eix del con, si es tractés d'una projecció cilíndrica o cònica i no és perpendicular al pla de projecció si es tracta d'una projecció plana. Les projeccions obliqües s'utilitzen quan volem que un punt qualsevol aparegui al centre del mapa.

Per construir una projecció obliqua podríem deduir les seves equacions en cada cas particular, però disposant de l'ordinador ens serà més fàcil trobar unes expressions per rotar la Terra de tal manera que ens quedi centrada tal com la volem, i després projectar aquests punts alterats. Esquemàticament el que volem fer és:

$$(\varphi, \lambda) \rightarrow (\varphi', \lambda') \rightarrow (x, y)$$

Existeixen diferents mètodes per realitzar aquest procés, nosaltres el que farem serà convertir la latitud i la longitud en coordinades cartesianes (X, Y, Z) sobre l'esfera; rotarem aquestes coordenades per obtenir (X', Y', Z'). Aquests nous valors tornaran a ser convertits en coordinades geogràfiques longitud, latitud. Llavors aplicarem les equacions de transformació de la projecció que desitgem per a obtenir finalment les coordenades rectangulars al pla del mapa (x, y).

$$(\varphi, \lambda) \rightarrow (X, Y, Z) \rightarrow (X', Y', Z') \rightarrow (\varphi', \lambda') \rightarrow (x, y)$$

2.4.1 Conversió de coordenades geogràfiques a coordenades cartesianes

Per a realitzar el primer pas descompondrem el vector posició d'un punt (φ, λ) mitjançant la trigonometria:

$$\begin{aligned} X &= R\cos\varphi\cos\lambda \\ Y &= R\cos\varphi\sin\lambda \\ Z &= R\sin\varphi \end{aligned}$$

Per a rotar aquestes coordenades hem de saber primer quin angle i respecte quin eix les volem rotar. L'objectiu és que un punt amb coordenades φ_1, λ_1 aparegui en el mapa en la posició de les coordenades φ_0, λ_0.

2.4.2. Rotació al voltant de Z

En primer lloc girarem el globus un angle λ_0-λ_1 respecte l'eix Z, considerant aquest com l'eix que passa pels pols. Per fer això utilitzarem les matrius de rotació. La matriu de rotació de l'eix Z és:

$$R_Z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per tant les noves coordenades X_1,Y_1,Z_1 un cop fet el primer gir de λ_0-λ_1 seran:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = R_z \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\lambda_0 - \lambda_1) & \sin(\lambda_0 - \lambda_1) & 0 \\ -\sin(\lambda_0 - \lambda_1) & \cos(\lambda_0 - \lambda_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

2.4.3. Rotació al voltant de Y

El que hem fet amb la longitud, també ho haurem de realitzar amb la latitud. Farem girar l'esfera un angle respecte l'eix Y, que passa per les coordenades 0º,90ºE i 0º,90ºO.

$$\begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = R_Y \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_0 - \varphi_1) & 0 & \sin(\varphi_0 - \varphi_1) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi_0 - \varphi_1) & 0 & \cos(\varphi_0 - \varphi_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix}$$

Si realitzéssim la projecció en aquest moment, el punt (φ_1, λ_1) ja ens apareixeria en el plànol en les coordenades del punt (φ_0, λ_0) quan aquest està sense rotar, com desitjàvem.

Ara podem passar aquest producte de matrius a equacions, doncs ens serà útil en la realització del programa disposar de les rotacions en forma de funció:

$$X_1 = X\cos(\lambda_0 - \lambda_1) + Y\sin(\lambda_0 - \lambda_1)$$
$$Y_1 = Y\cos(\lambda_0 - \lambda_1) - X\sin(\lambda_0 - \lambda_1)$$
$$Z_1 = Z$$

$$X_2 = X_1\cos(\varphi_0 - \varphi_1) + Z_1\sin(\varphi_0 - \varphi_1)$$
$$Y_2 = Y_1$$
$$Z_2 = Z_1\cos(\varphi_0 - \varphi_1) - X_1\sin(\varphi_0 - \varphi_1)$$

2.4.4. Rotació al voltant de l'eix X

El més usual es rotar l'esfera per centrar un punt escollit en les coordenades 0,0. Quan fem això, és a dir, quan les coordenades φ_0 i λ_0 són 0, podem realitzar una tercera rotació en l'eix X, a causa que el punt el qual ja haurem centrat no se'ns desplaçarà. Aquesta tercera rotació canvia l'aspecte i la orientació del plànol, per exemple, si en un mapa el N quedava a la part superior després de realitzar aquest gir addicional ens quedaria a l'esquerra.

Les equacions de X, Y, Z en realitzar la tercera rotació en aquest cas particular són:

$$\begin{bmatrix} X_3 \\ Y_3 \\ Z_3 \end{bmatrix} = R_X \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} X_3 &= X_2 \\ Y_3 &= Y_2 \cos\theta + Z' \sin\theta \\ Z_3 &= Z_2 \cos\theta - Y' \sin\theta \end{aligned}$$

2.4.5. Les coordenades geogràfiques finals

Un cop obtenim les coordenades cartesianes definitives, hem d'aconseguir els nous valors de la longitud i la latitud. Per fer-ho només hem de buscar les inverses de les expressions utilitzades anteriorment i obtenim que:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{Z_3}{R}\right)$$

$$\lambda = \arctan\left(\frac{Y_3}{X_3}\right) \text{ i si } X_3 = 0 \;\Rightarrow \lambda = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \, o \, \frac{3}{2}\pi$$

Les projeccions obliqües s'utilitzen en casos on volem traslladar unes propietats que té un plànol en un punt determinat, a un altra posició que ens interessa a nosaltres. Per exemple, en les projeccions planes totes les línies que passen pel pol són cercles màxims. Amb aquesta tècnica podem rotar l'esfera de manera que qualsevol punt desitjat prengui l'antiga posició del pol, per tal que quan sigui projectat compleixi aquesta propietat.

3. La programació

Abans de començar a treballar en el programa, és important que coneguem breument que és un programa d'ordinador i quines característiques ha de tenir, així com els passos que s'han de seguir en la seva construcció.

3.1. Un programa d'ordinador

Suposem que li diem a una persona que ens calculi una arrel quadrada, i aquesta no sap com es fa. Ens trobaríem amb la necessitat de definir el procediment com un conjunt d'instruccions elementals, amb les quals fos possible realitzar l'algoritme.

Quan volem resoldre un problema amb l'ordinador hem de fer exactament el mateix, realitzar un arxiu que especifiqui les operacions elementals que haurà de fer la màquina per a solucionar-lo. Però per la creació d'aquest document ens trobem amb l'inconvenient que el llenguatge que nosaltres usem no és entès per l'ordinador, i a l'inversa, els humans tampoc comprenem el llenguatge màquina de l'ordinador. Per a solucionar això s'han creat els llenguatges de programació, són uns llenguatges els quals ens permeten escriure un programa utilitzant unes instruccions semblants al llenguatge humà, naturalment amb una sintaxis molt més fixa, que després és traduït utilitzant un compilador, a llenguatge màquina, el llenguatge de l'ordinador.

Així doncs, un programa d'ordinador és el conjunt d'instruccions que haurà d'executar seqüencialment la màquina per a la solució d'un problema.

Hem de tenir en compte que l'ordinador és una màquina que només sap sumar i resoldre càlculs lògics molt elementals d'una forma directa. Aquestes limitacions ens obligaran a haver d'escriure una gran quantitat d'instruccions per a resoldre un problema relativament simple. Tot i aquest inconvenient l'aplicació de l'ordinador per a la mecanització de tasques i resolució de problemes ens dona major velocitat, seguretat, exactitud i el més important, fa que a la llarga ens estalviem molta feina.

3.2. Passos en la construcció d'un programa

Abans de començar a programar, hem de definir exactament el problema a resoldre, ja que amb una mala definició d'aquest ens és més complicada la seva resolució.

Un cop ja tenim ben clara la qüestió a resoldre es du a terme el procés del disseny, és on em de pensar com resoldre el problema, amb quins passos, com estructurarem el programa, és a dir, aporta la idea de direcció al difícil procés de desenvolupar un programa d'ordinador. Si un programa no es planifica i es fa sobre la marxa, el més usual és que presenti molts errors, no tingui una estructura clara i sigui impossible d'entendre si no n'ets l'autor. Al disseny també hem de reflexionar sobre els objectius que volem assolir.

Convé destacar que la qualitat d'un programa es determina per la seva estructura, la seva facilitat de modificació i correcció, la facilitat de lectura per altres programadors i la seva simplicitat. Totes aquestes qualitats les definim en el disseny, per tant és tant o més important aquest procés que la pròpia programació.

Quan ja hem acabat el disseny, és l'hora de programar totes aquestes idees que tenim sobre el paper a l'ordinador. Si hem realitzat un bon disseny això no ha de comportar cap problema.

El pas següent a la programació és l'execució del programa i la correcció dels errors del mateix. Cal dir, que per més bon programador que se sigui, l'aparició d'errors és inevitable.

Si ja tenim el programa i funciona perfectament, per acabar, haurem de fer un anàlisi i valoració entre resultats que desitjàvem i els obtinguts.

3.3. La construcció del nostre programa

El nostre objectiu és construir un programa d'ordinador que ens dibuixi a la pantalla mapes de la Terra en diferents projeccions cartogràfiques. Així doncs, ja tenim el problema definit.

Existeixen diverses maneres d'estructurar un programa, nosaltres utilitzarem la programació estructurada o modular. Organitzarem el programa en diferents mòduls. Cada un d'ells realitzarà una funció específica i estarà unit amb la resta directament o mitjançant el programa principal[3]. Per resoldre el problema el descompondrem en problemes més simples, cada un dels quals representarà un mòdul. El programa serà la unió de tots els mòduls.

Per a construir el programa, el que farem serà simplificar el problema. Primer dissenyarem i construirem un prototip. Un cop comprovarem el bon funcionament d'aquest, intentarem millorar la seva estructura. Quan ja tinguem la base ben construïda anirem afegint mòduls fins a obtenir el programa final. Bé doncs, sembla que ja podem començar:

Especificacions del primer programa: Escriure un programa que dibuixi una la malla de paral·lels i meridians de la projecció cilíndrica equidistant amb dos paral·lels de referència no obliqua.

[3] Hem seleccionat aquest tipus d'estructuració perquè és la manera més fàcil de trobar els errors i modificar el programa. Quan modifiquem un mòdul podem mantenir intacta la resta del programa.

Descompondrem el problema en:

```
Introduir paràmetres de la projecció (latitud de referència).
Dibuixar la malla de la projecció.
```

El primer pas prou evident per ser programat però el segon l'hem de desglossar en:

```
Repetir el procés:
    Generar coordenades longitud, latitud corresponents.
    Amb les equacions de transformació aconseguir les coordenades x, y.
    Posar un punt en les coordenades x, y de la pantalla.
Fins que tots els punts longitud, latitud de la malla estiguin dibuixats.
```

Ara haurem de dividir el procés de generar coordenades per tal de que sigui programable. Volem que ens vagi donant punts per obtenir una quadrícula de meridians i paral·lels separats entre ells un angle θ.

Per dibuixar un paral·lel hauríem generar punts d'una latitud constant i anar variant la longitud perquè prengués tots els valors possibles. Quan s'acabés aquest procés sumaríem a la latitud l'angle θ i repetiríem el procés. I així fins a obtenir tots els paral·lels dibuixats. Per dibuixar els meridians realitzaríem un procés anàleg, mantindríem la longitud constant i variaríem la latitud.

La latitud pot prendre valors de –180º (el signe negatiu indica sentit oest) a 180º (sentit est), la longitud de –90º (sentit sud) a 90º (sentit nord), per tant l'angle θ comprès entre cada meridià i cada paral·lel ha de ser divisor de 90.

Considerant això podem dir que una manera d'aconseguir el procés descrit anteriorment seria:

```
Assignar a la longitud el seu valor mínim possible i restar-li 1
Assignar a la latitud el seu valor mínim possible i restar-li θ.
Repetir el procés:
    Sumar θ a la latitud.
    Repetir el procés:
     Sumar 1 a la longitud.
     ...
    Fins que la longitud sigui 180.
    Assignar a la longitud el seu valor mínim possible menys 1
Fins que la latitud sigui 90.
```

Per a construir els meridians i paral·lels tenim dos opcions bàsiques, o fer un altre el bucle[4] com l'anterior per als meridians, o modificar aquest perquè dibuixi paral·lels i meridians. Tot i que a segona opció és més complexa de construir, és més consistent i ens estalviarà de copiar dos cops el procés de transformació i dibuix.

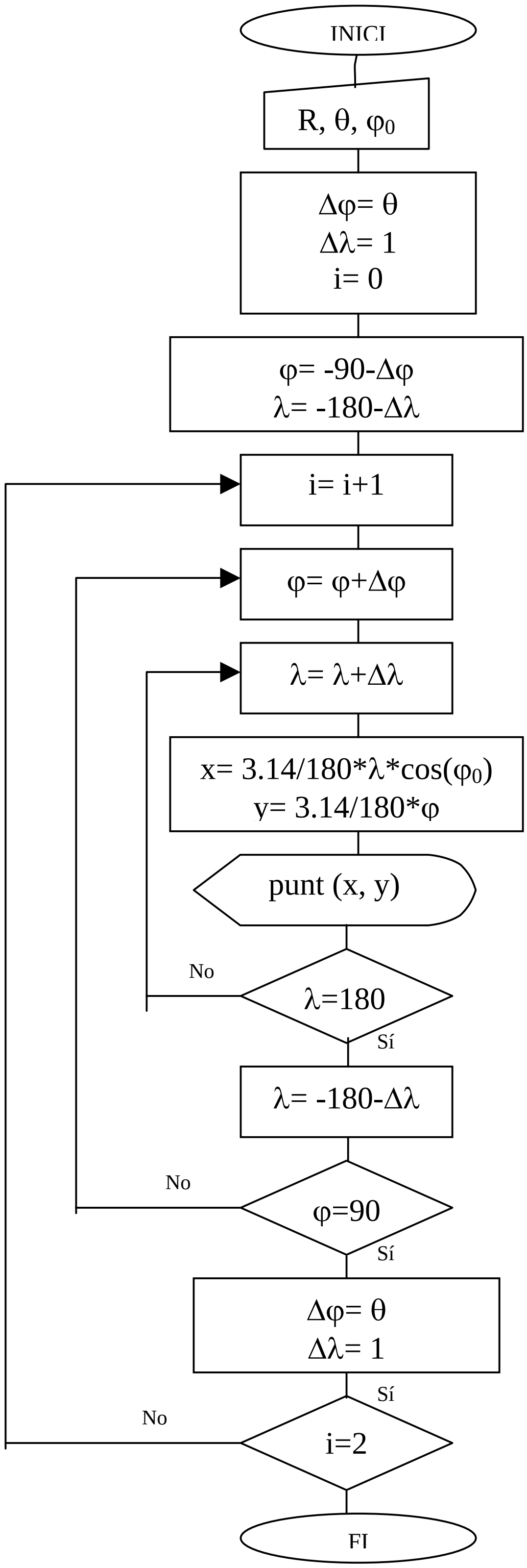
```
Crear una variable variació de longitud (Δλ) i assignar-li 1.
Crear una variable variació de latitud (Δφ) i assignar-li θ.
Repetir 2 vegades el següent procés:
   Assignar a la longitud el seu valor mínim possible i restar-li Δλ.
   Assignar a la latitud el seu valor mínim possible i restar-li Δφ.
   Repetir el procés:
     Sumar Δφ a la latitud.
     Repetir el procés:
       Sumar Δλ a la longitud.
       ...
     Fins que la longitud sigui 180.
     Assignar a la longitud el seu valor mínim possible menys Δλ
   Fins que la latitud sigui 90.
   Assignar a la variació de longitud (Δλ) el valor θ.
   Assignar a la variació de latitud (Δφ) el valor 1.
Tornar.
```

Ja tenim el problema fragmentat en operacions fàcilment programables. Recapitulant veiem per dibuixar una la malla de paral·lels i meridians de la projecció cilíndrica equidistant amb dos paral·lels de referència no obliqua, l'ordinador hauria de:

```
Preguntar escala, latitud de referència i espai entre paral·lels i
meridians, si les dades són correctes continuar.
Crear una variable variació de longitud (Δλ) i assignar-li 1.
Crear una variable variació de latitud (Δφ) i assignar-li θ.
Repetir 2 vegades el següent procés:
   Assignar a la longitud el seu valor mínim possible i restar-li Δλ.
   Assignar a la latitud el seu valor mínim possible i restar-li Δφ.
   Repetir el procés:
     Sumar Δφ a la latitud.
     Repetir el procés:
       Sumar Δλ a la longitud.
       Calcular les coordenades x, y a partir de φ, λ.
       Posar un punt en les coordenades x, y de la pantalla.
     Fins que la longitud sigui 180.
     Assignar a la longitud el seu valor mínim possible menys Δλ
   Fins que la latitud sigui 90.
   Assignar a la variació de longitud (Δλ) el valor θ.
   Assignar a la variació de latitud (Δφ) el valor 1.
Tornar.
```

[4] Cicle d'instruccions que es repeteix fins que es compleix una condició. Permet estalviar-nos d'escriure les mateixes instruccions molts cops.

Una manera de visualitzar aquesta seqüència és mitjançant un organigrama, en aquest cas seria:



Un vegada hem comprovat el bon funcionament del petit programa que acabem de dissenyar, hem de pensar en millorar-lo. Com la seva estructura sembla prou sòlida, intentarem modificar-lo per a que ens faci projeccions obliqües.

La solució més fàcil per tal que el programa anterior ens permeti dibuixar també projeccions obliqües és construir un mòdul que ens transformi unes coordenades φ, λ en unes ja rotades φ', λ' preparades per a ser projectades (*veure projeccions obliqües 2.4*) . Els passos que haurà de fer aquest programa seran els mateixos que l'anterior, amb l'única diferència que hi haurem d'incloure el procediment de transformació de les obliqües.

```
Repetir el procés:
     Generar coordenades longitud, latitud corresponents.
     Transformar coordenades longitud, latitud amb el procediment
     d'obliqües.
     Amb les equacions de transformació aconseguir les coordenades x, y.
     Posar un punt en les coordenades x, y de la pantalla.
Fins que tots els punts longitud, latitud de la malla estiguin dibuixats.
```

Per a construir aquest procediment dividirem el procés en tres parts:

```
Transformar φ, λ en X,Y,Z.
Rotar X,Y,Z i obtenir X',Y',Z'.
Calcular unes noves φ', λ' ja rotades.
```

Aquests càlculs els farem mitjançant les expressions de l'apartat projeccions obliqües.

Un cop acabem de construir aquest mòdul i l'annexionem al programa inicial ens trobem amb el problema que en algunes projeccions obliqües (depenent de la rotació realitzada) es veu el puntejat en la pantalla degut a que els punts no estan prou junts. Per a solucionar aquesta qüestió hauríem de dibuixar una línia de punt a punt.

El següent pas doncs, és ben clar, modificar el programa a fi que dibuixi una línia entre cada punt. En el primer inconvenient en que ens trobem és que per dibuixar una línia necessitem 2 punts, un d'origen i un de destí, i fins ara només n'utilitzàvem un. Per a solucionar-ho realitzarem la següent modificació:

```
...
Assignem a unes variables x0 i y0 els valors de x i y.
Calculem els nous valors de x i y amb les equacions de projecció.
Dibuixem una línia de x0, y0 fins a x, y a la pantalla.
...
```

Aquest canvi farà que el programa ens dibuixi una línia on el punt de destí és el següent punt d'origen, de manera que ens va enllaçant els diferents punts de coordenades latitud, longitud que genera el programa. Si analitzem l'ordre en que el programa genera els punts, ens adonarem que els meridians no són dibuixats en ordre, és a dir, el programa no dibuixa primer un meridià sencer incrementat la latitud i quan acaba realitza el mateix procés amb el següent meridià fins a tenir-los tots dibuixats, sinó dibuixa el punt corresponent a una latitud a tots els meridians i quan acaba incrementa aquesta latitud tornant a repetir la seqüència. Aquest fet té com conseqüència que quan el programa dibuixi els meridians ens enllaçarà amb una línia aquest cada vegada que canvia de meridià.

Per evitar aquest problema haurem de redissenyar el bucle per a que ens generi les coordenades de forma que siguin consecutives.

El nou disseny és el següent:

```
Repeteix 2 vegades:
Assignem a una variable B el valor de –90-θ.
Repeteix el procés:
Incrementem B amb θ.
Repeteix el procés 360 vegades:
Si és la segona vegada que passes per aquí llavors assigna a la latitud B i
a la longitud A, sinó assigna a la latitud A i a la longitud B+90.
...
Torna.
Fins que B sigui igual a 90.
Torna.
```

Després de comprovar el bon funcionament d'aquesta rutina, tornem a reflexionar sobre com podem seguir millorant el programa. Efectivament ens interessaria que el programa fos capaç de dibuixar-nos el mapa pròpiament dit, i no només una malla de meridians i paral·lels. Per fer això serà necessària l'existència d'una base de dades que contingui les coordenades longitud latitud de la línia de costa dels 5 continents. El que haurà de fer el programa doncs és llegir l'arxiu extreure'n el parell de coordenades i representar-les a la pantalla a partir de les equacions de projecció. Amb aquest objectiu realitzarem a continuació del bucle que ens dibuixa la malla les següents operacions:

```
Mentre l'arxiu no s'acabi, repeteix:
Llegeix coordenades φ,λ de l'arxiu.
Assigna a les variables x0 i y0 els valors de x i y.
Calcula x, y amb les expressions de la projecció.
Dibuixa línia de x0, y0 a x, y en la pantalla.
Torna.
```

En l'arxiu cada parell de coordenades longitud, latitud estan situades una sota l'altra com en una taula, cada vegada que el programa llegeix l'arxiu, llegeix la fila següent que havia llegit anteriorment. Com podem veure, aquest procediment ens dibuixaria una línia d'un punt a al següent, tal com estiguin aquests ordenats en la base de dades, és per aquesta raó que les coordenades han d'estar convenientment organitzades en l'arxiu.

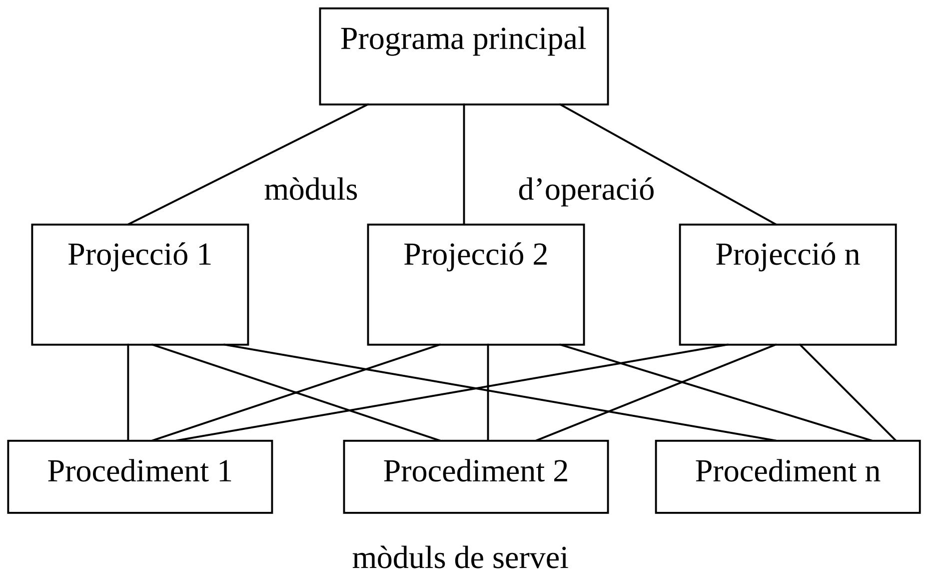
Tot i que ja hem complert els objectius inicials en quant a obliqües, dibuix de mapes etc., aquest programa només ens permet representar mapes d'una única projecció. A continuació construirem un altre programa que no tingui aquesta limitació.

La millor solució per a resoldre aquest problema seria afegir al programa una mena de selector que tries les equacions de transformació a utilitzar depenent de la projecció que desitgem dibuixar. Però això ens és problemàtic de dur a terme ja que cada projecció té uns paràmetres de configuració diferents, és per aquesta raó que el que farem serà construir un mòdul per a cada projecció. Pot semblar que aquesta solució no és la més adequada degut a que el programa ens ocuparà més memòria, però és la que ens donarà més velocitat al programa, i una cosa molt important la més fàcil de construir.

3.4. Funcionament del programa final

El programa principal enllaça amb els diferents mòduls d'operació. Cada projecció constitueix un mòdul d'operació. Aquests mòduls de les projeccions estan dividits en tres parts, la primera és on entrem els paràmetres de configuració, una segona on es dibuixa la malla de meridians i paral·lels, i una tercera un es dibuixen els continents. Els mòduls d'operació disposen d'uns mòduls de servei, que realitzen les funcions que tenen en comú, com pot ser: rotar les obliqües, traçar línies, dibuixar punts etc.

Un esquema del funcionament del programa seria el següent:



Al executar el programa primer de tot ens apareix el menú on seleccionem la projecció. Segons la projecció escollida el programa bifurcarà a un altre mòdul d'operació, on se'ns demanarà les dades corresponents i ens dibuixarà a la pantalla el plànol. Premen la tecla corresponen, tornarem al programa principal i el menú apareixerà de nou a la pantalla, on podrem escollir si dibuixar un nou mapa o sortir.

4. Aplicacions

El programa que hem construït és una ajuda per a realitzar diferents tasques en que s'utilitzin els mapes a gran escala, un geòleg el faria servir per a senyalar-hi les plaques tectòniques, un meteoròleg per a dibuixar-hi els mapes del temps, un mestre per a explicar la cartografia, etc.

A continuació, a part de la utilitat didàctica, presentem dues aplicacions que li hem trobat nosaltres, insistim però que cada individu n'hi donaria unes de diferents.

4.1. Aplicació 1: Navegació

És ben clar que la utilitat primordial dels mapes, i més els mundials, és la navegació. Una aplicació per al nostre programa seria que marqués sobre el plànol el cercle màxim entre dos punts, en qualsevol projecció.

4.1.1. Cercle màxim

Recordem que el cercle màxim, és la circumferència de la intersecció d'un pla que talla l'esfera pel seu centre. Naturalment hi ha infinits plans a l'esfera que contenen el centre, per tant el primer pas serà trobar l'equació del pla que conté el centre de l'esfera i els dos punts de la superfície del globus en que volem traçar el cercle màxim de coordenades geogràfiques A: $(R, \varphi_a, \lambda_a)$ i B: $(R, \varphi_b, \lambda_b)$.

Amb l'objectiu de trobar l'equació del pla passem de coordenades geogràfiques a cartesianes:

$$A: \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_a \cos\lambda_a \\ \cos\varphi_a \sin\lambda_a \\ \sin\varphi_a \end{pmatrix} \qquad B: \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_b \cos\lambda_b \\ \cos\varphi_b \sin\lambda_b \\ \sin\varphi_b \end{pmatrix}$$

Considerant que el centre de l'esfera, a la qual li assignem radi 1, està situat a l'origen de coordenades, tenim els vectors posició:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$$

Com aquests dos vectors estaran continguts en el pla, l'equació vectorial d'aquest serà:

$$\vec{p} = O + \mu\overrightarrow{OA} + \lambda\overrightarrow{OB}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$$

I l'equació general o implícita:

$$\begin{vmatrix} x & x_a & x_b \\ y & y_a & y_b \\ z & z_a & z_b \end{vmatrix} = 0$$

$$(y_a z_b - z_a y_b)x + (z_a x_b - x_a z_b)y + (x_a y_b - y_a x_b)z = 0$$

D'altra banda, sabem que l'equació de l'esfera de radi 1 és:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

D'aquesta manera la intersecció que formen el pla amb l'esfera o cercle màxim és el sistema format pels dos llocs geomètrics.

$$\begin{cases} (y_a z_b - z_a y_b)x + (z_a x_b - x_a z_b)y + (x_a y_b - y_a x_b)z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Ara només hauríem de resoldre aquest sistema no lineal per substitució i obtindríem les equacions de y i z en funció d'x.

Això quedaria programat d'aquesta manera:

```
Assignar a X el valor –R.
Repetir el procés:
   Incrementar  X.
```

```
   Calcular Y,Z corresponents.
   Amb X,Y,Z calcular φ,λ.
   Calcular x, y amb les equacions de la projecció.
   Dibuixar punt a x, y.
Fins que X sigui igual a R.
```

Ara ja podem traçar la distància més curta entre dos punts en el mapa, però recordem que és molt difícil seguir el rumb d'aquest recorregut degut a que el rumb no és uniforme. És per això que seria útil que el programa també ens dibuixes les loxodromes.

4.1.2. Loxodromes

Una loxodroma és la trajectoria resultant de mantenir el rumb constant. Com s'ha dit anteriorment, rumb és l'angle que formen el vector velocitat amb els meridians.
Així doncs, mitjançant la trigonometria podem determinar que la tangent de l'angle que formen el vector velocitat amb la direcció N-S o meridans, és igual al quocient de les components E-O i N-S de la velocitat, és a dir:

$$\tan\alpha = \frac{v_x}{v_y}$$

Sabent que la velocitat és la derivada de la posició respecte el temps, tenim:

$$\tan\alpha = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{dx}{dy}$$

Substituint ara per $x=\lambda R\cos\varphi$ i $y=\varphi R$, ens queda:

$$\tan\alpha = \frac{d\lambda R\cos\varphi}{d\varphi R} = \frac{d\lambda\cos\varphi}{d\varphi}$$

Aïllant $d\lambda$ i integrant:

$$d\lambda = \frac{\tan\alpha}{\cos\varphi}d\varphi$$

$$\lambda = \int\frac{\tan\alpha}{\cos\varphi}d\varphi = \tan\alpha\int\frac{1}{\cos\varphi}d\varphi = \tan\alpha\ \mathrm{arcsinh}\varphi$$

```
Assignar a la latitud el valor –90.
Repetir el procés
     Incrementar la latitud.
     Calcular la longitud corresponent.
     Calcular les coordenades x, y pantalla mitjançant les equacions de
     projecció.
     Dibuixar punt en les coordenades x, y de la pantalla.
Fins que la latitud sigui igual a 90.
```

Aplicació 2: Efecte Coriolis

La Terra gira amb moviment circular uniforme sobre si mateixa, essent l'eix de rotació la recta formada pel dos pols. Quan un objecte sobre la Terra es desplaça amb una component en la seva velocitat de direcció nord-sud, aquest experimenta una desviació en relació a la Terra. Aquesta desviació és en el sentit de les agulles del rellotge a l'hemisferi nord i en sentit contrari a l'hemisferi sud. Aquest efecte té molta importància per la seva influència sobre els vents, els corrents oceànics o les trajectòries de vol, de míssils, coets...

Donat aquest efecte seria interessant que el programa ens dibuixes la trajectòria d'un objecte en el mapa donades la seva velocitat i posició inicials.

La posició inicial l'expressarem en coordenades longitud, latitud i la velocitat en components nord-sud, est-oest.

La velocitat angular de la terra és constant en qualsevol punt però la velocitat lineal no.

$$v_L = \omega \cdot r = \omega \cdot R \cos\varphi \quad \text{(m/s)}$$

Com podem veure aquesta varia amb la latitud. Això vol dir que un moviment en direcció est-oest no experimentarà l'efecte Coriolis ja que no varia la seva latitud.

Suposem un moviment la velocitat del qual té una component en direcció N-S anomenada v_y. L'arc recorregut en aquesta direcció en un temps t per aquest cos seria $v_y \cdot t$, i l'angle recorregut en la direcció dels meridians o la variació de la latitud esdevindria $\frac{v_y t}{R}$. Per tant la latitud on es troba aquest cos després d'un temps t serà:

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi = \varphi_0 + \frac{v_y t}{R} \quad \text{(rad)}$$

Si la velocitat lineal en un punt de l'esfera és $\omega R \cos\varphi$, la velocitat lineal de la Terra en el punt on es troba aquest cos serà $\omega R \cos\varphi_0 + \frac{v_y t}{R}$. Per tant la velocitat relativa entre el cos i el terra en la direcció E-O, serà la diferència entre la velocitat inicial del cos degut a la seva latitud i a la component x de la seva velocitat inicial, menys la velocitat lineal de la terra en aquest punt:

$$v_x = v_{0x} + \omega R \cos\varphi_0 - \omega R \cos\left(\varphi_0 + \frac{v_y t}{R}\right) \quad \text{(m/s)}$$

Si considerem la Terra com a sistema de referència, podem dir que la velocitat del cos és la velocitat relativa entre el cos i la Terra. L'arc en la direcció E-O que recorre el mòbil en un interval de temps molt petit és *vx dt*, per tant la variació de la longitud en aquest mateix interval de temps:

$$d\lambda = \frac{v_x dt}{R\cos\left(\varphi_0 + \frac{v_y t}{R}\right)}$$

Per tal de saber la variació de la longitud en un interval de temps t haurem de sumar totes aquests petites variacions de la latitud, per tant:

$$\Delta\lambda = \int_0^t \frac{v_x dt}{R\cos\left(\varphi_0 + \frac{v_y t}{R}\right)} = \int_0^t \frac{v_{0x} + \omega R\cos\varphi_0 - \omega R\cos\left(\varphi_0 + \frac{v_y t}{R}\right)}{R\cos\left(\varphi_0 + \frac{v_y t}{R}\right)} dt =$$

$$= \int_0^t \frac{v_{0x}}{R\cos\left(\varphi_0 + \frac{v_y t}{R}\right)} dt + \int_0^t \frac{\omega\cos\varphi_0}{\cos\left(\varphi_0 + \frac{v_y t}{R}\right)} dt - \int_0^t \omega dt =$$

$$= \frac{R}{2v_y} \operatorname{arcsinh}\left(\varphi_0 + \frac{v_y t}{R}\right)\left(\frac{v_{0x}}{R} + \omega\cos\varphi_0\right) - \omega t \qquad (rad)$$

A fi i efecte de conèixer les coordenades longitud, latitud del mòbil en un temps t, sumarem la variació de latitud i longitud a les coordenades de la posició inicial, en conclusió:

$$\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda = \lambda_0 \frac{R}{2v_y} \operatorname{arcsinh}\left(\varphi_0 + \frac{v_y t}{R}\right)\left(\frac{v_{0x}}{R} + \omega\cos\varphi_0\right) - \omega t \qquad \text{(rad)}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi = \varphi_0 + \frac{v_y t}{R} \quad \text{(rad)}$$

Amb aquestes equacions ens serà molt fàcil dibuixar la trajectòria del cos, només haurem d'incrementar t, i dibuixar a la pantalla el punt corresponent a aquest temps, tal com podem veure en la seqüència següent:

```
Repetir el procés:
Incrementar t.
Calcular λ, φ corresponents.
Calcular les coordenades x, y pantalla amb les equacions de projecció.
Dibuixar punt a x, y.
Fins que t sigui igual  a t màxim.
```

5. Conclusions

Una vegada finalitzat el projecte, és hora de fer un balanç de la qüestió:

Valorem positivament la tècnica utilitzada en la programació que ha premés obtenir una estructura molt simple de programa i considerem que la programació estructurada és una bona tècnica per a realitzar programes.

Ens ha estat útil la utilització d'un prototip per anar evolucionant en la idea de l'estructura del programa, tot i que el mètode de treball que hem utilitzat, en que anàvem transformant el programa prototip sobre la marxa, a mesura que apareixien problemes, no ens ha convençut i ens plantegem si hauria estat millor realitzar un disseny complet d'aquest prototip. Una bona feina en el disseny pot evitar molts problemes no previstos.

Hem comprovat els beneficis en diferents aspectes (eficiència i velocitat) d'automatitzar processos amb l'ordinador.

Després de realitzar un programa, podem dir que el procés de crear una aplicació informàtica és lent, llarg i difícil si es vol obtenir un bon resultat. També hem observat que existeixen moltes maneres de crear un programa per a què ens realitzi una mateixa funció, la gràcia és trobar la més adequada.

Ens hem adonat de les aplicacions que tenen les matemàtiques les quals ens passen desapercebudes a l'aula.

Després de tot, ha estat un treball gratificant.

6. Bibliografia

Joyanes Aguilar, L. *Turbo/Borland PASCAL 7.* McGrawHill. Madrid 1997.

Bishop, P. *Programación avanzada en Basic*. Anaya Multimedia. Madrid 1985.

Ànonim. *Programación de ordenadores. Programación estructurada*. ECC. Barcelona. 1990.

Ànonim. *Programación de ordenadores. Estructura básica del proceso de datos (III).* ECC. Barcelona. 1990.

Agudo Larrínaga, A. J. *Informática y programación M.A.E –IV.* IORTVE. Madrid. 1986.

Hagget, P. *Geography: a modern synthesis*. Harper & Row. Nova York. 1972.

Strahler, A. N. *Geografía física*. Ediciones Omega. 1984.

McDonell, P. W. *Introduction to Map projections*, Lammark Enterprises, 1991.

Dony, R. *Grafismo científico con micoroordenador*. Mason, S.A. 1986.

Mailing, D. H. Pergmanon Press. *Coordiante systems and map projections.*

Joly, F. *La Cartografía.* Ariel Geografía.

http://hum.aum.edu.pl/~zbzw/glob/glob1.htm

http://www.nationalgeographic.com

7. Índex